	*Robert-Bosch-Gymnasium* **Physik** (2- und 4-stündig), NGO	
Praktikum Versuch Nr.: 2.1	Block 2 / Schwingungen Fourieranalyse und -synthese	21.4.2014

Fourieranalyse und -synthese in Experiment und Simulation

1. Theoretische und technische Grundlagen

Analysiert man einen Sinuston am Oszilloskop (erzeugt vom Funktionsgenerator), so erkennt man einen reinen sinusförmigen Verlauf. Ein Klang gleicher Tonhöhe, der z. B. durch Anzupfen einer Saite oder Anblasen eines Blasinstrumentes entsteht, zeigt sich ebenfalls als periodischer Vorgang, hat aber keine Sinusform.

Beim Anzupfen von Saiten ist bekannt, dass durch die Form der Wellenerregung (Saite wird an einer Stelle ergriffen und gespannt, so dass zusammen mit der Ursprungslage ein (schiefseitiges) Dreieck entsteht) nicht nur die Grundschwingung (1. Harmonische), sondern auch höhere Harmonische entstehen, mit einem für den jeweiligen Klang (die Klangfarbe, das benutzte Instrument) unterschiedlichem Amplitudenverhältnis der höheren Harmonischen.

Würde man nun mit mehreren Funktionsgeneratoren (einem Synthesizer) phasengleich diese Töne (Grundton und höhere Harmonische) in genau dem erkannten Amplitudenverhältnis parallel auf einen Lautsprecher geben, würde dieser genau diesen Klang wiedergeben.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) konnte allgemein zeigen, dass sich jede periodische Funktion darstellen lässt durch eine (unendliche) Reihe von Summanden mit Sinus- bzw. Cosinus-Form und mit einem bestimmten Amplitudenverhältnis, welches für jede der periodischen Funktionen anders ist.

Periodische Funktion:

Z. B.: f(x + p) = f(x); dabei ist p das Periodizitätsintervall; (z. B.: p = 2 π);
bei Schwingungen ist: $x = \omega \cdot t$

Die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion lautet allgemein:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)]$$

$$= \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos(x) + b_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \cos(2x) + b_2 \cdot \sin(2x) + \ldots$$

Die Reihe konvergiert für unendlich viele Summanden gegen f(x).

Gesucht sind allerdings die Koeffizienten a_n und b_n dieser Reihe.

Fourier konnte zeigen, dass diese Koeffizienten (Fourier-Koeffizienten) wie folgt berechnet werden können:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{n=1}^{2\pi} f(x)\,dx$$

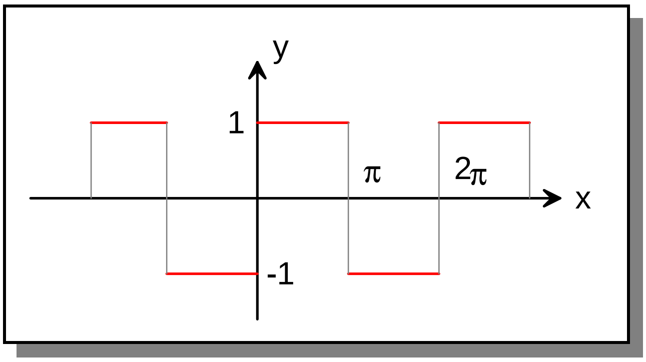
$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{n=1}^{2\pi} f(x) \cdot \cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{n=1}^{2\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\,dx$$

Falls die Amplitude der Funktion f(x) nicht 1 ist, muss noch mit der Amplitude malgenommen werden (also mit s_0).

Beispiele:

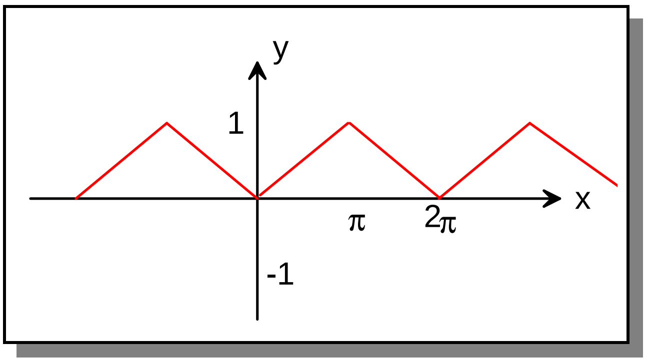
Rechteckfunktion:



Hier ergibt sich folgende Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)\right]$$, d.h.:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} + \left[\sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x) + \ldots\right]$$



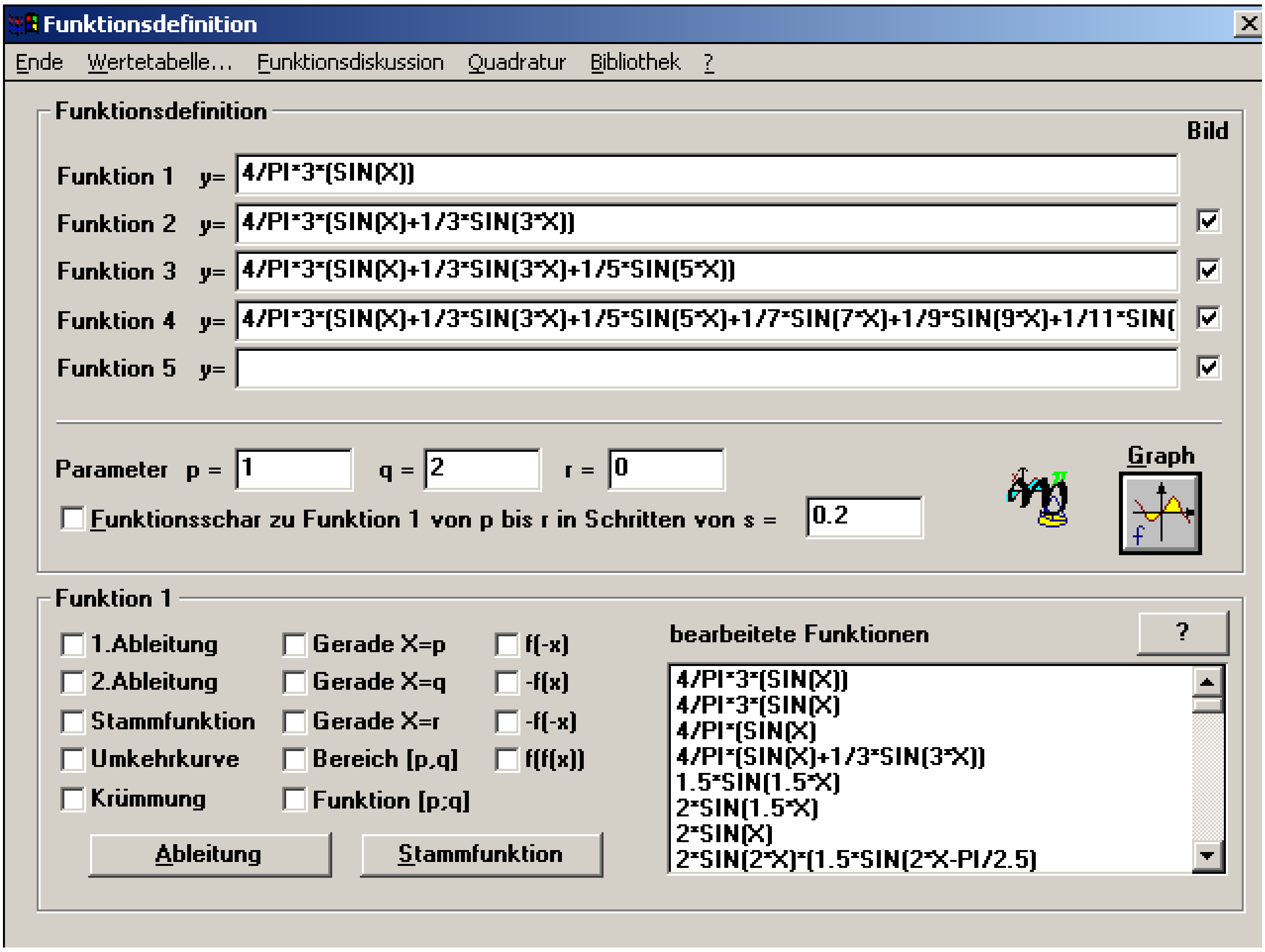
Sägezahnfunktion:

Hier ergibt sich folgende Fourier-Reihe:

$$f(x) = -\frac{4}{\pi} + \left[\cos(x) + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \frac{1}{7^2}\cos(7x) + \ldots\right]$$

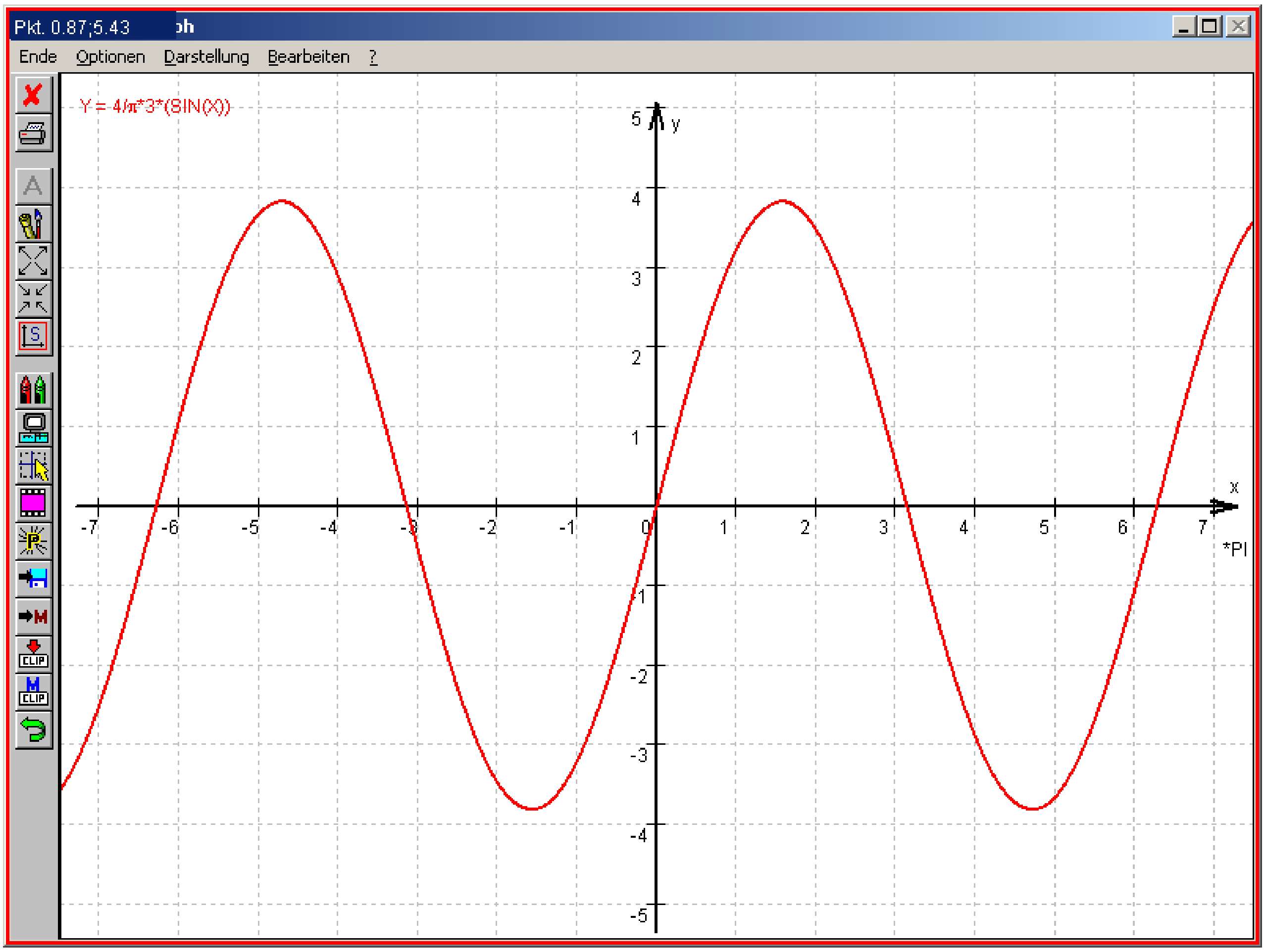
Beispiel einer Fouriersynthese (Rechteckfunktion)

Man benutzt ein beliebiges Programm, mit dem man am PC Funktionsgraphen darstellen kann, z. B. WinFunktion Mathematik und erstellt die Funktion mit zunehmender Anzahl von Summanden:

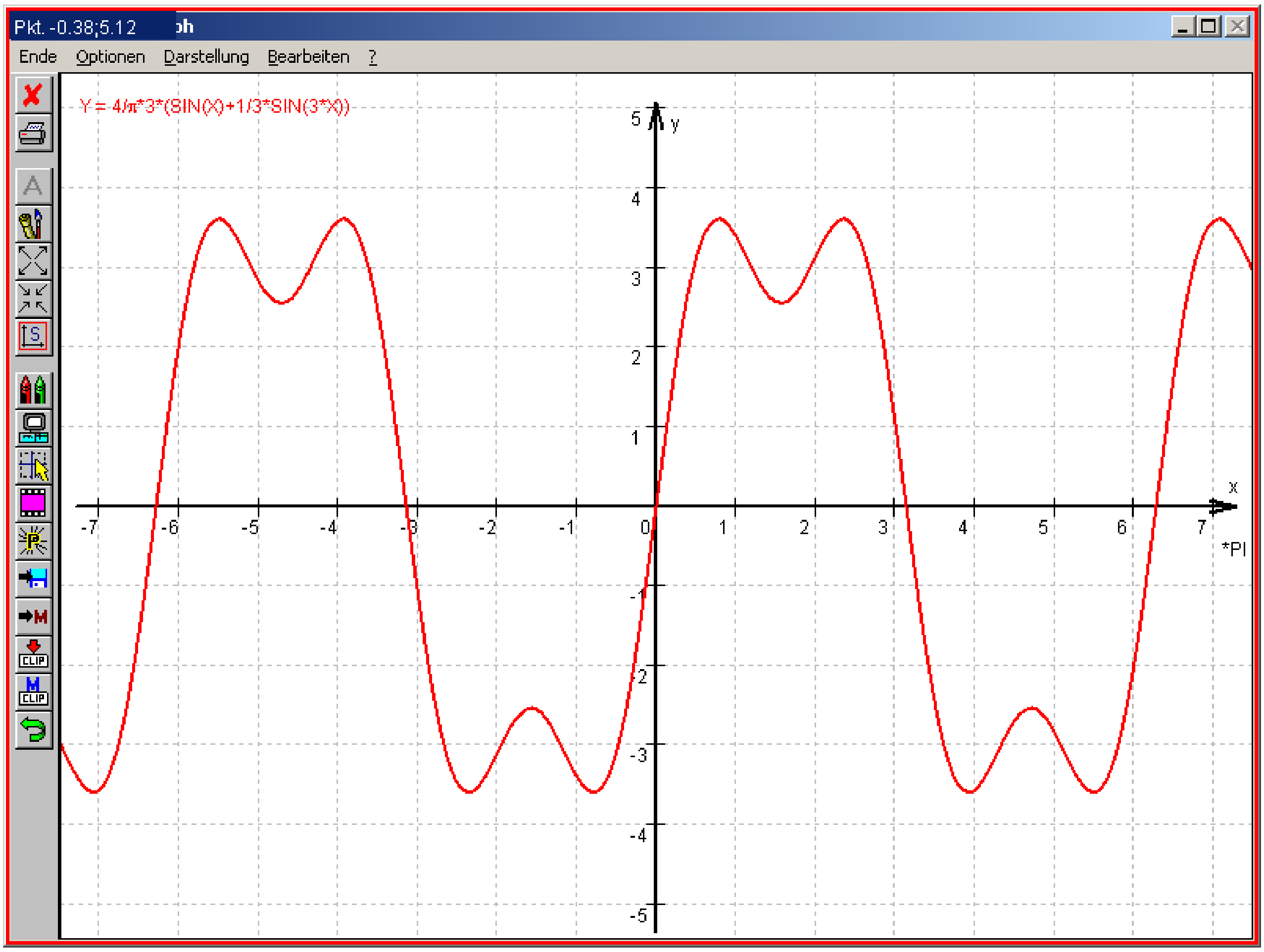


	*Robert-Bosch-Gymnasium* **Physik** (2- und 4-stündig), NGO	
Praktikum Versuch Nr.: 2.1	Block 2 / Schwingungen Fourieranalyse und -synthese	21.4.2014

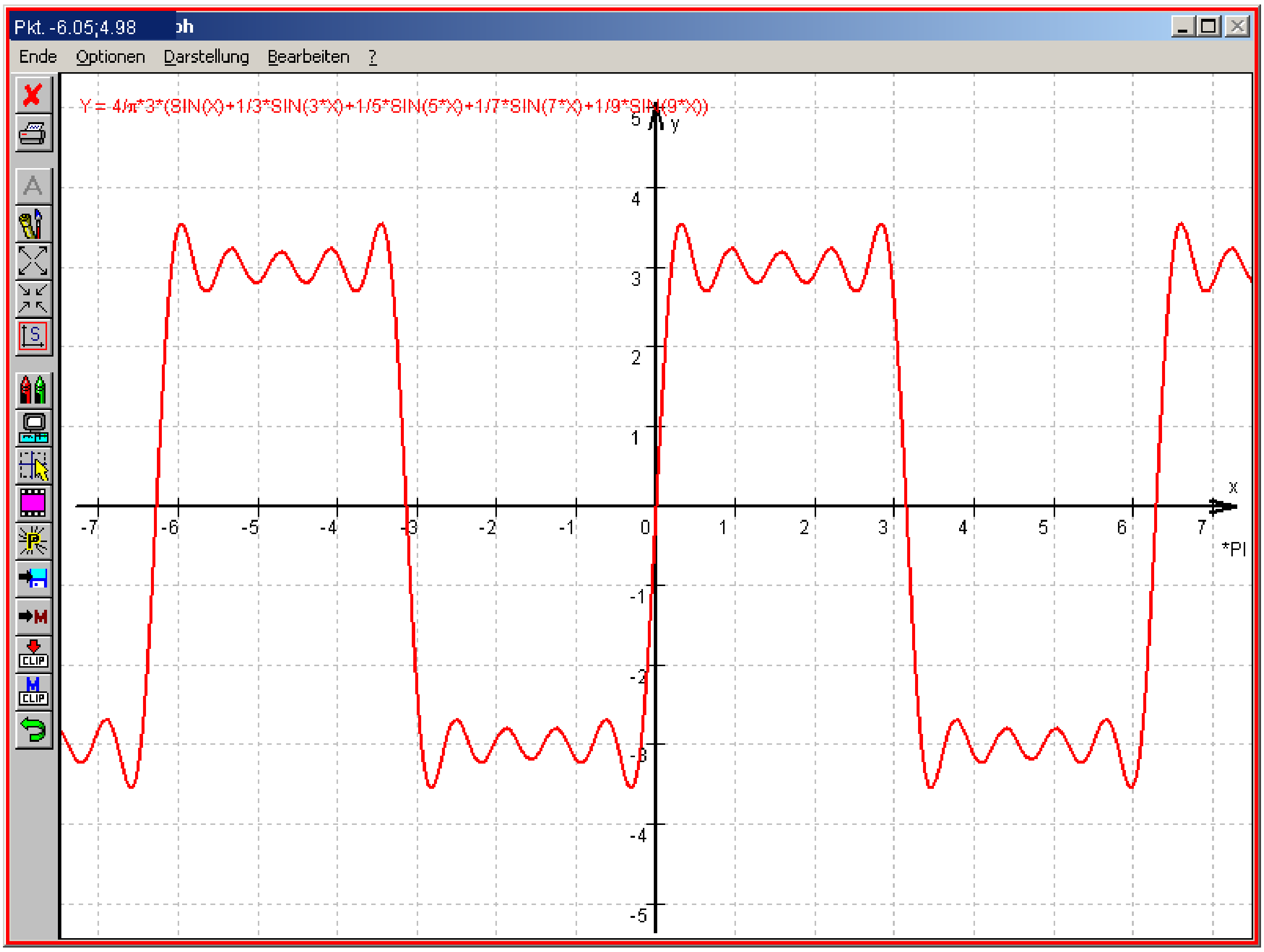
Erster Summand:



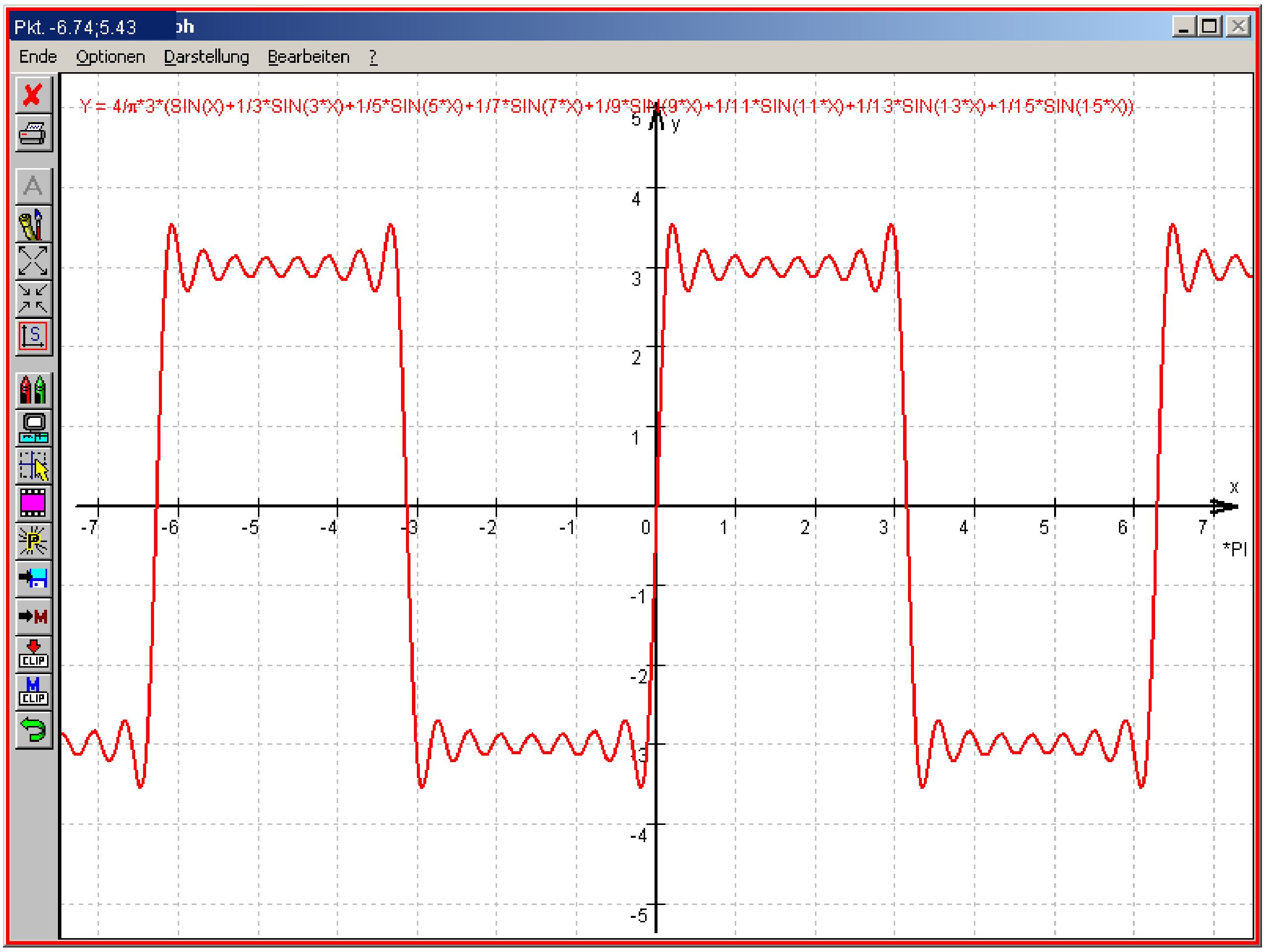
Hier sind jetzt bereits die ersten beiden Komponenten addiert:



Jetzt sind schon fünf Summanden addiert:

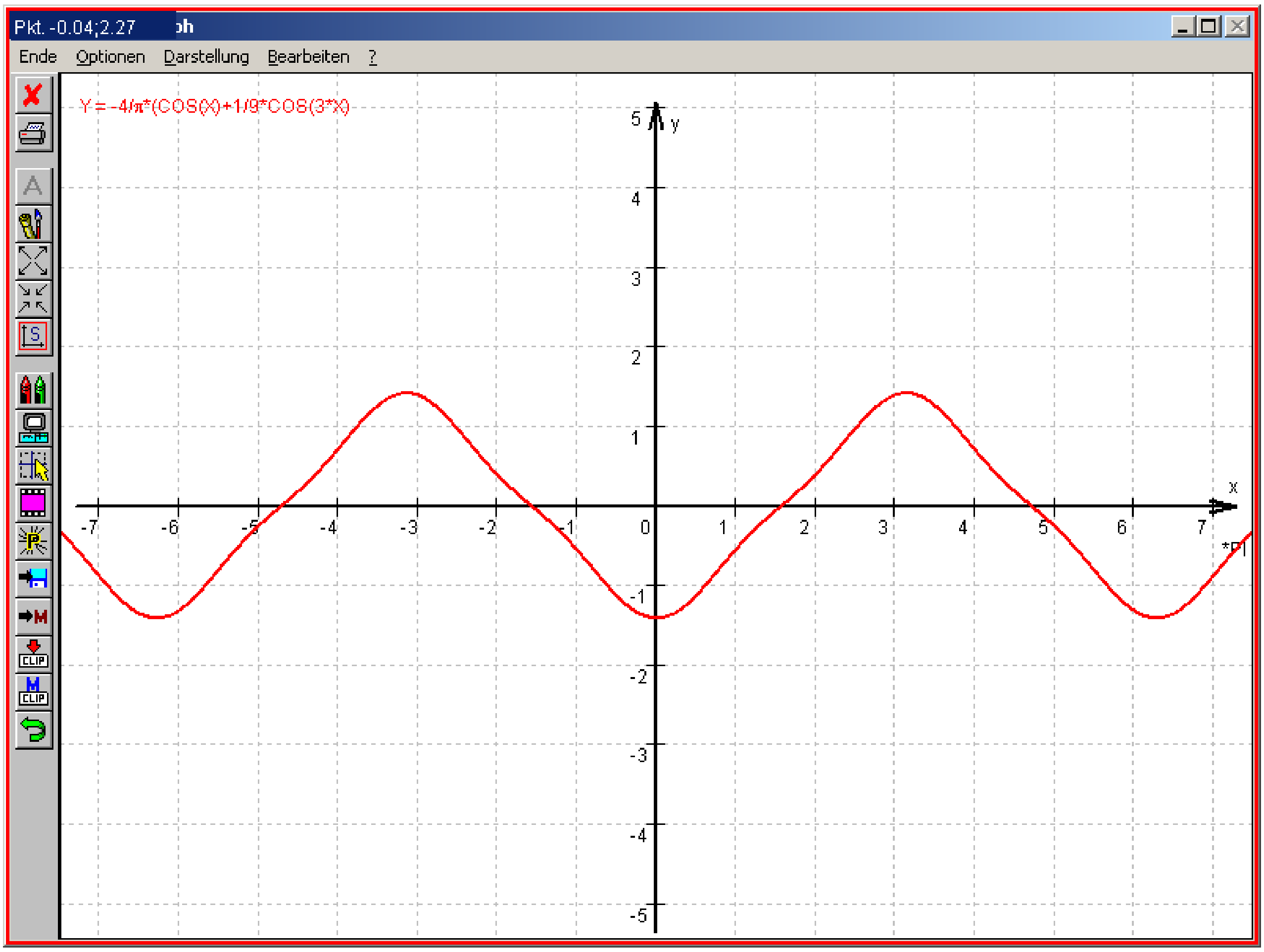


Und hier nähert sich der Verlauf immer mehr der Rechteckfunktion an:

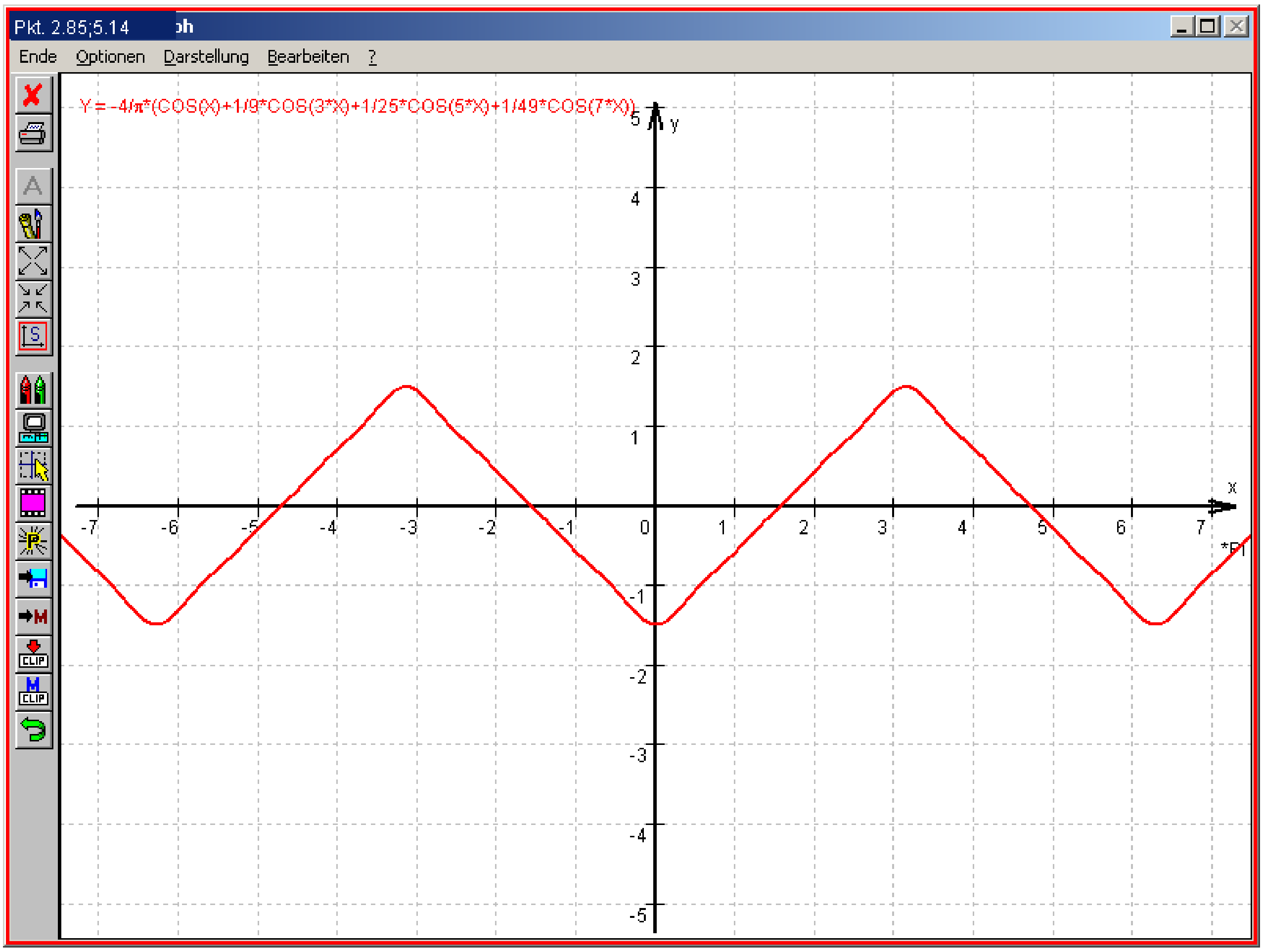


Analog kann man auch die Dreieckfunktion (Sägezahn-Verlauf) und andere periodische Funktionen generieren.

Die Sägezahnfunktion, mit zwei Summanden:



Die Sägezahnfunktion mit mehreren Summanden:



Versuchsvorbereitung

Informiere dich anhand dieser Anleitung und mit Hilfe von Büchern über die Fourieranalyse und Synthese. Arbeite dich in ein Programm ein, mit dem man Funktionsverläufe darstellen kann (z. B. WinFunktion Mathematik).

Informiere dich an Hand von Büchern oder den ausgeteilten Kopien über die physikalische Bedeutung der Fourieranalyse und Synthese.

	*Robert-Bosch-Gymnasium* **Physik** (2- und 4-stündig), NGO	Robert Bosch Gymnasium
Praktikum Versuch Nr.: 2.1	Block 2 / Schwingungen Fourieranalyse und -synthese	21.4.2014

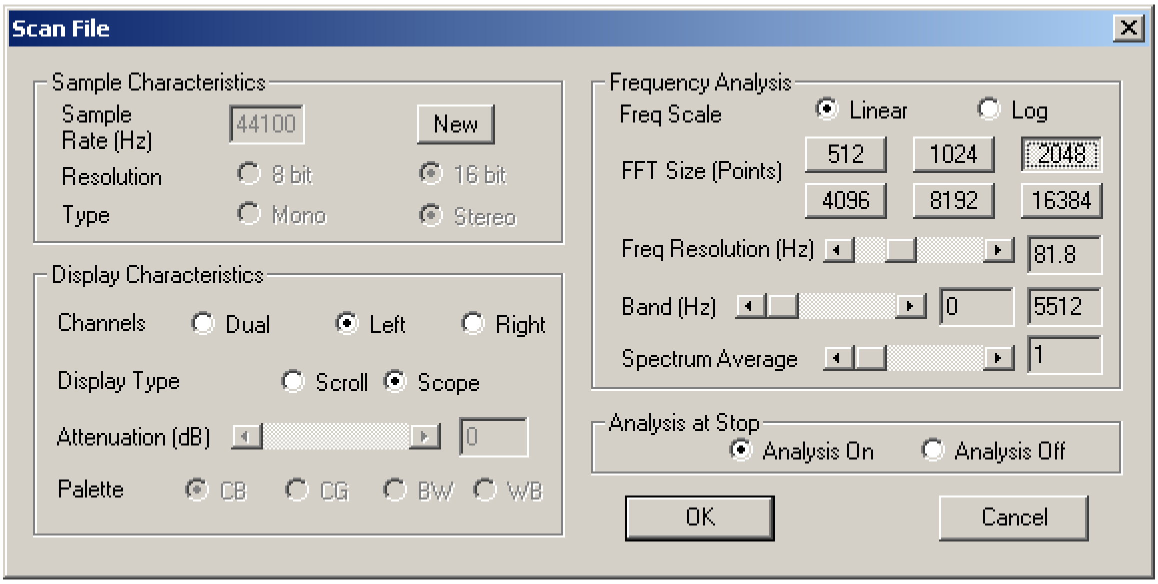
Aufgabenstellung

Es sollen mit einem Funktionsgenerator Sinus-Töne und Töne mit Rechteck- oder Dreiecksverlauf erzeugt und an einem Lautsprecher ausgegeben werden. Wähle dazu stets dieselbe Frequenz (z. B. 0,5 kHz).

Die Töne werden dann über ein Mikrofon mit Hilfe eines PC (Soundkarte) und einem Soundrecorder (z. B. Mit demn Microsoft Audiorecorder) aufgezeichnet. Kontrolliere vor der Aufnahme, ob die Wiedergabesteuerung (in der Systemsteuerung) richtig eingestellt ist:

Die Sounddateien werden gespeichert und dann mit einem Fourieranalysator-Programm (Frequenzanalyse) untersucht. (Wir verwenden den Spectrum Analyzer; die Schule besitzt eine Schullizenz dieser ameikanischen Shareware). Dazu wird die Datei geöffnet (File / Scan File)

Folgende Einstellungen sind geeignet:



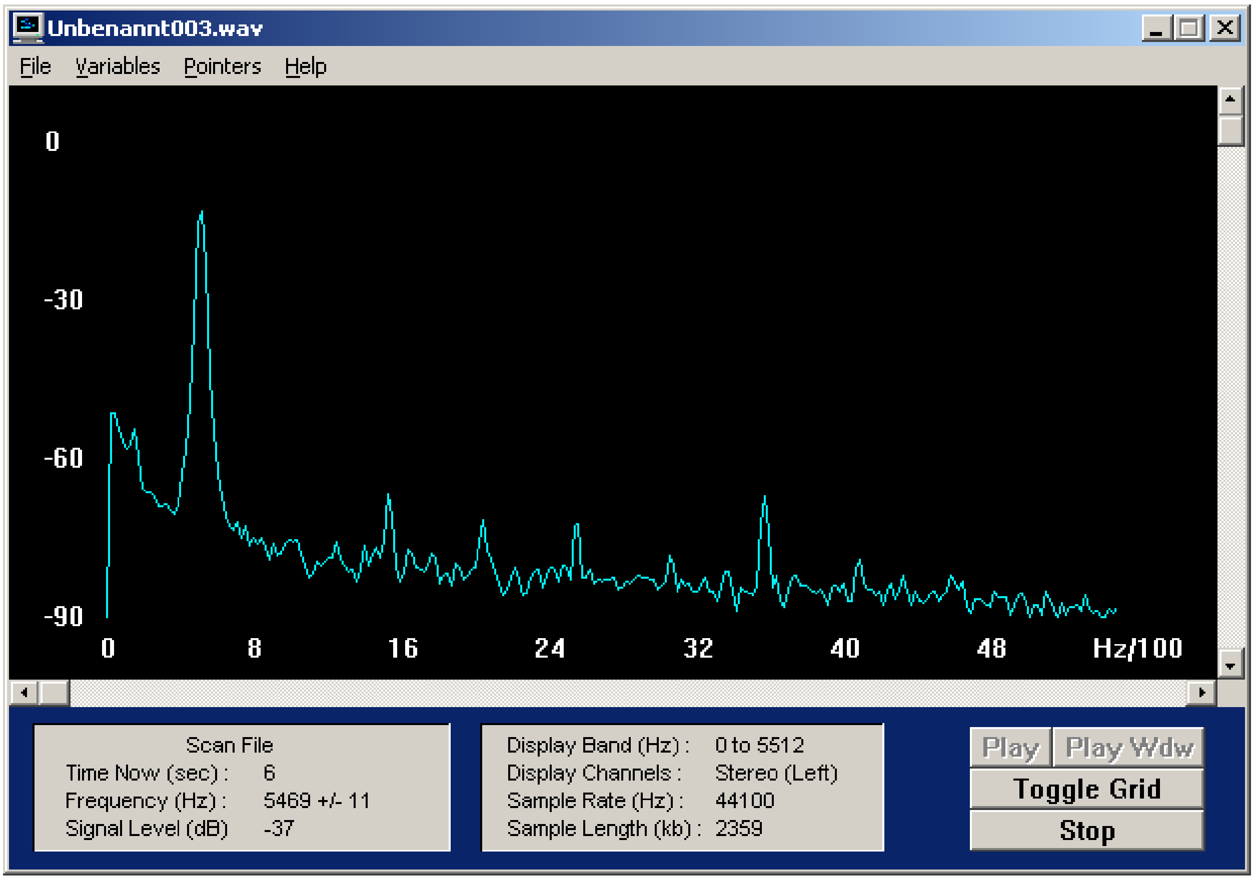
Man wählt die einkanalige Bearbeitung und unter "Display Type" die Oszilloskop-Funktion. Bei den Analyse-Optionen stellt man z. B. 2048 Datenpunkte ein und erzielt so eine Frequenzauflösung von 81,8 Hz. Der gescannte Frequenzbereich geht somit von 0 Hz bis 5512 Hz. Das reicht bei einem 500-Hz-Ton, um die Grundfrequenz und etliche höhere Harmonische aufzunehmen.

Es sind Screenshots von den Analysen zu fertigen und an Hand dieser Dokumente die Frequenzen der Harmonischen zu untersuchen, die die jeweiligen Töne / Klänge bilden.

Danach nimmt man Klänge auf, die z. B. vom Monochord, der Stimmgabel oder anderen (auch mitgebrachten) Instrumenten stammen. Auch sie werden mit der Frequenzanalyse untersucht.

Man kann auch versuchen, einen reinen Ton zu pfeifen, zu summen oder zu singen.

Untersuche auch das Frequenzspektrum eines Knalls oder eines Schlages auf eine Triangel, auf ein Becken, eine Trommel o. ä.



Oben: Fourier-Spektrum eines Sinustones. Man sieht, dass die Grundschwingung bei ca. 500 Hz total dominiert.

Auswertung / Protokoll

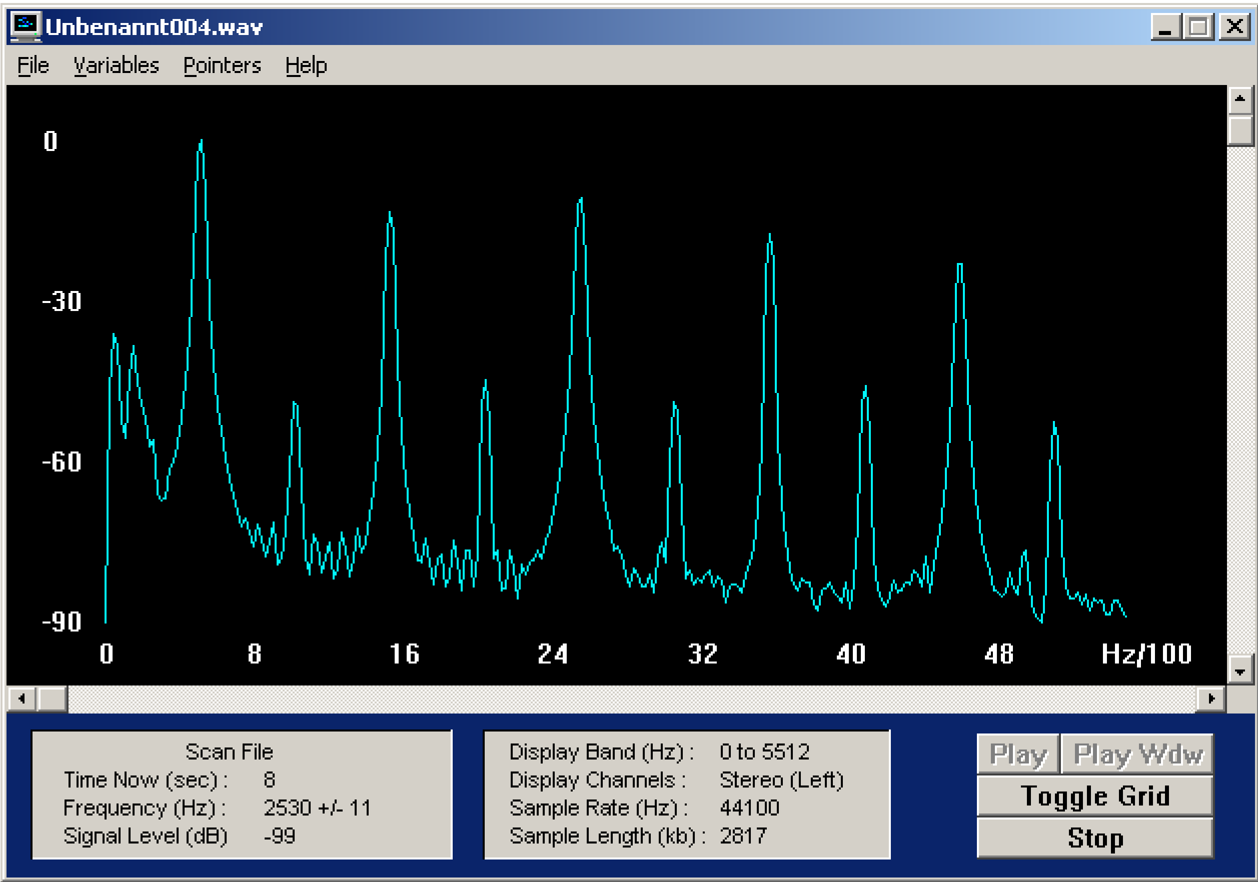
Im Protokoll werden zunächst die physikalischen und mathematischen Hintergründe der Fourieranalyse und -synthese dargestellt.

Dann werden einige Kurvenformen synthetisiert und deren Entstehung mit zunehmender Fourier-Komponenten-Zahl dokumentiert. Suche dazu in einem Mathematik- oder Physikbuch die Fourierkoeffizienten weiterer Kurvenverläufe!

	*Robert-Bosch-Gymnasium* **Physik** (2- und 4-stündig), NGO	Robert Bosch Gymnasium
Praktikum Versuch Nr.: 2.1	Block 2 / Schwingungen Fourieranalyse und -synthese	21.4.2014

Im zweiten Teil werden die Frequenzspektren verschiedener Töne und Klänge dargestellt. Beim Rechteck- und Sägezahn-Klang aus dem Funktionsgenerator ist zu untersuchen, ob und inwiefern die vorhergesagten Koeffizienten in den Spektren grob wieder zu finden sind.

Die anderen Klänge sind hinsichtlich ihrer Obertöne zu analysieren. Die Verteilung der höheren Harmonischen ist zu bewerten / begründen. Das gilt insbesondere für die "Knall"-Effekte.



Oben: Fourierspektrum eines Rechecktones (500 Hz).